THÉORÈME DES RÉSIDUS DANS C^2

Grzegorz Biernat

Institute of Mathematics and Computer Science, Technical University of Częstochowa

Résumè. Dans cet article on propose la démonstration alternative du théorème des résidus dans $\boldsymbol{C}^2$.

1. Le résidu à l'infini

Soit $h(Y_1, Y_2)$ un polynôme dans $\boldsymbol{C}^2$. On définit

$$\tilde{h}(X_1, X_2) = X_1^{\deg h} h\left(\frac{1}{X_1}, \frac{X_2}{X_1}\right) \quad \text{et} \quad \tilde{\tilde{h}}(X_1, X_2) = X_1^{\deg h} h\left(\frac{X_2}{X_1}, \frac{1}{X_1}\right)$$

Soient g et f_1, f_2 des polynômes dans $\boldsymbol{C}^2$. On pose $s = deg\, f_1 + deg\, f_2 - deg\, g - 3$. Dans ce qui suit on supposera $\deg f_1 \geq 1$ et $deg\, f_2 \geq 1$. On considérera le cas de $s < 0$.

Soit l_∞ une droite á l'infini et soient $C_1 = \overline{V(f_1)}^{\boldsymbol{P}^2}$ et $C_2 = \overline{V(f_2)}^{\boldsymbol{P}^2}$ les fermetures des courbes affinnes $V(f_1) = \{z \in \boldsymbol{C}^2 : f_1(z) = 0\}$ et $V(f_2) = \{z \in \boldsymbol{C}^2 : f_2(z) = 0\}$ dans $\boldsymbol{P}^2$. Pour $a \in l_\infty \subset \boldsymbol{P}^2$ on prend $\tilde{a}$ et $\tilde{\tilde{a}}$ comme leur images affins dans $\boldsymbol{C}^2$.

Lemme. *On suppose que les polynômes f_1 et f_2 n'aient pas de facteurs communs. Si le point $(0:0:1)$ n'appartient pas aux courbes C_1 et C_2, on a l'égalité*

$$\sum_{a \in C_1 \cap l_\infty} \operatorname{Res}_{\tilde{a}}\, \tilde{g} / \left(\tilde{f}_1, X_1^{-s} \tilde{f}_2\right) = \sum_{b \in C_2 \cap l_\infty} \operatorname{Res}_{\tilde{b}}\, \tilde{g} / \left(X_1^{-s} \tilde{f}_1, \tilde{f}_2\right)$$

Preuve. D'après la règle de transformation [1, 5], on a

$$\operatorname{Res}_{\tilde{a}}\, \tilde{g} / \left(\tilde{f}_1 \tilde{f}_2, X_1^{-s}\right) = \operatorname{Res}_{\tilde{a}}\, \tilde{g} / \left(\tilde{f}_1, X_1^{-s} \tilde{f}_2\right) \tag{1}$$

si $a \in C_1 \cap l_\infty$ et $\tilde{f}_2(\tilde{a}) \neq 0$. De même

$$\operatorname{Res}_{\tilde{b}}\, \tilde{g} / \left(\tilde{f}_1 \tilde{f}_2, X_1^{-s}\right) = \operatorname{Res}_{\tilde{b}}\, \tilde{g} / \left(\tilde{f}_2, X_1^{-s} \tilde{f}_1\right) = -\operatorname{Res}_{\tilde{b}}\, \tilde{g} / \left(X_1^{-s} \tilde{f}_1, \tilde{f}_2\right) \tag{2}$$

si $b \in C_2 \cap l_\infty$ et $\tilde{f}_1(\tilde{b}) \neq 0$.

Soit maintenant $c \in (C_1 \cap C_2) \cap l_\infty$. Supposons pour l'instant que chacun de germes $\hat{\tilde{f}}_1$ et $\hat{\tilde{f}}_2$ au point $\tilde{c}$ ait la décomposition sans facteurs multiples. Soient $\hat{\tilde{f}}_1 = \hat{f}_{11} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{1p}$ et $\hat{\tilde{f}}_2 = \hat{f}_{21} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{2q}$ au voisinage du point $\tilde{c}$. En prenant des paramétrisation $\Phi_i = (\varphi_{1i}, \varphi_{2i})$ et $\Psi_j = (\psi_{1j}, \psi_{2j})$ des zéros de f_{1i} et f_{2j}, on obtient [2]

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{\tilde{c}}\ \tilde{g} / \left(\tilde{f}_1 \tilde{f}_2, X_1^{-s} \right) = \\
&- \sum_{1 \le i \le p} \mathrm{res}_0 \frac{\tilde{g}(\Phi_i) \varphi_{1i}'}{\dfrac{\partial \left(\tilde{f}_1 \tilde{f}_2 \right)}{\partial X_2} (\Phi_i) \varphi_{1i}^{-s}} - \sum_{1 \le j \le q} \mathrm{res}_0 \frac{\tilde{g}(\Psi_j) \psi_{1j}'}{\dfrac{\partial \left(\tilde{f}_1 \tilde{f}_2 \right)}{\partial X_2} (\Psi_j) \psi_{1j}^{-s}} = \\
&- \sum_{1 \le i \le p} \mathrm{res}_0 \frac{\tilde{g}(\Phi_i) \varphi_{1i}'}{\dfrac{\partial \tilde{f}_1}{\partial X_2} (\Phi_i) \tilde{f}_2 (\Phi_i) \varphi_{1i}^{-s}} - \sum_{1 \le j \le q} \mathrm{res}_0 \frac{\tilde{g}(\Psi_j) \psi_{1j}'}{\dfrac{\partial \tilde{f}_2}{\partial X_2} (\Psi_j) \tilde{f}_1 (\Psi_j) \psi_{1j}^{-s}} = \\
&\mathrm{Res}_{\tilde{c}}\ \tilde{g} / \left(\tilde{f}_1, X_1^{-s} \tilde{f}_2 \right) + \mathrm{Res}_{\tilde{c}}\ \tilde{g} / \left(\tilde{f}_2, X_1^{-s} \tilde{f}_1 \right) = \\
&\mathrm{Res}_{\tilde{c}}\ \tilde{g} / \left(\tilde{f}_1, X_1^{-s} \tilde{f}_2 \right) - \mathrm{Res}_{\tilde{c}}\ \tilde{g} / \left(X_1^{-s} \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \right)
\end{aligned}
$$

Si quelconque de germes au point $\tilde{c}$ admet les facteurs multiples on choisit des constants α_1 et α_2 de telle manière que les germes $\left(\tilde{f}_1 + \alpha_1 X_1^{-s} \tilde{f}_2 \right)^{\wedge}$ et $\left(\tilde{f}_2 + \alpha_2 X_1^{-s} \tilde{f}_1 \right)^{\wedge}$ restent sans facteurs multiple au point $\tilde{c}$ [2]. On peut appeler maintenant l'égalité précedente et appliquer la régle de transformation

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{\tilde{c}}\ \tilde{g} / \left(\tilde{f}_1 \tilde{f}_2, X_1^{-s} \right) = \\
&\mathrm{Res}_{\tilde{c}}\ \tilde{g} \left(1 + \alpha_1 \alpha_2 X_1^{-2s} \right) / \left(\left(\tilde{f}_1 + \alpha_1 X_1^{-s} \tilde{f}_2 \right) \left(\tilde{f}_2 + \alpha_2 X_1^{-s} \tilde{f}_1 \right), X_1^{-s} \right) = \\
&\mathrm{Res}_{\tilde{c}}\ \tilde{g} \left(1 + \alpha_1 \alpha_2 X_1^{-2s} \right) / \left(\tilde{f}_1 + \alpha_1 X_1^{-s} \tilde{f}_2, X_1^{-s} \left(\tilde{f}_2 + \alpha_2 X_1^{-s} \tilde{f}_1 \right) \right) \\
&- \mathrm{Res}_{\tilde{c}}\ \tilde{g} \left(1 + \alpha_1 \alpha_2 X_1^{-2s} \right) / \left(X_1^{-s} \left(\tilde{f}_1 + \alpha_1 X_1^{-s} \tilde{f}_2 \right), \tilde{f}_2 + \alpha_2 X_1^{-s} \tilde{f} \right) = \\
&\mathrm{Res}_{\tilde{c}}\ \tilde{g} \left(1 - \alpha_1 \alpha_2 X_1^{-2s} \right) / \left(\tilde{f}_1 + \alpha_1 X_1^{-s} \tilde{f}_2, X_1^{-s} \left(\tilde{f}_2 + \alpha_2 X_1^{-s} \tilde{f}_1 \right) \right) \\
&+ \mathrm{Res}_{\tilde{c}}\ \tilde{g} \cdot 2 \alpha_1 \alpha_2 X_1^{-2s} / \left(\tilde{f}_1 + \alpha_1 X_1^{-s} \tilde{f}_2, X_1^{-s} \left(\tilde{f}_2 + \alpha_2 X_1^{-s} \tilde{f}_1 \right) \right) \\
&- \mathrm{Res}_{\tilde{c}}\ \tilde{g} \left(1 - \alpha_1 \alpha_2 X_1^{-2s} \right) / \left(X_1^{-s} \left(\tilde{f}_1 + \alpha_1 X_1^{-s} \tilde{f}_2 \right), \tilde{f}_2 + \alpha_2 X_1^{-s} \tilde{f}_1 \right) \\
&- \mathrm{Res}_{\tilde{c}}\ \tilde{g} \cdot 2 \alpha_1 \alpha_2 X_1^{-2s} / \left(X_1^{-s} \left(\tilde{f}_1 + \alpha_1 X_1^{-s} \tilde{f}_2 \right), \tilde{f}_2 + \alpha_2 X_1^{-s} \tilde{f} \right) =
\end{aligned}
$$

$$\operatorname{Res}_{\tilde{c}} \tilde{g}/\left(\tilde{f}_1, X_1^{-s}\tilde{f}_2\right) + 2\alpha_1\alpha_2 \operatorname{Res}_{\tilde{c}} \tilde{g}X_1^{-s}/\left(\tilde{f}_1 + \alpha_1 X_1^{-s}\tilde{f}_2, \tilde{f}_2 + \alpha_2 X_1^{-s}\tilde{f}_1\right)$$
$$- \operatorname{Res}_{\tilde{c}} \tilde{g}/\left(X_1^{-s}\tilde{f}_1, \tilde{f}_2\right) - 2\alpha_1\alpha_2 \operatorname{Res}_{\tilde{c}} \tilde{g}X_1^{-s}/\left(\tilde{f}_1 + \alpha_1 X_1^{-s}\tilde{f}_2, \tilde{f}_2 + \alpha_2 X_1^{-s}\tilde{f}_1\right) =$$
$$\operatorname{Res}_{\tilde{c}} \tilde{g}/\left(\tilde{f}_1, X_1^{-s}\tilde{f}_2\right) - \operatorname{Res}_{\tilde{c}} \tilde{g}/\left(X_1^{-s}\tilde{f}_1, \tilde{f}_2\right)$$

Par consequent

$$\operatorname{Res}_{\tilde{c}} \tilde{g}/\left(\tilde{f}_1\tilde{f}_2, X_1^{-s}\right) = \operatorname{Res}_{\tilde{c}} \tilde{g}/\left(\tilde{f}_1, X_1^{-s}\tilde{f}_2\right) - \operatorname{Res}_{\tilde{c}} \tilde{g}/\left(X_1^{-s}\tilde{f}_1, \tilde{f}_2\right) \tag{3}$$

si $c \in \left(C_1 \cap C_2\right) \cap l_\infty$.

D'après (1), (2) et (3) il vient

$$\sum_{c\in(C_1\cup C_2)\cap l_\infty} \operatorname{Res}_{\tilde{c}} \tilde{g}/\left(\tilde{f}_1\tilde{f}_2, X_1^{-s}\right) = \sum_{a\in C_1\cap l_\infty} \operatorname{Res}_{\tilde{a}} \tilde{g}/\left(\tilde{f}_1, X_1^{-s}\tilde{f}_2\right) - \sum_{b\in C_2\cap l_\infty} \operatorname{Res}_{\tilde{b}} \tilde{g}/\left(X_1^{-s}\tilde{f}_1, \tilde{f}_2\right)$$

L'application $\left(\tilde{f}_1\tilde{f}_2, X_1^{-s}\right)$ n'a pas de zéros à l'infini et

$$\deg \tilde{g} \le \deg g = \deg f_1 + \deg f_2 - s - 3 = \deg\left(\tilde{f}_1\tilde{f}_2\right) + \deg X_1^{-s} - 3$$

La formule d'Euler-Jacobi-Kronecker [1, 4, 5] conclut que la somme des résidus ci-dessus à gauche s'annule. Ceci fini la preuve du lemme.

Pour le polynôme h soit $h = h^+ + h_{n-1} + \ldots + h_0$ sa decomposition en formes homogènes. Alors

$$\tilde{h}\left(X_1, X_2\right) = h^+\left(1, X_2\right) + X_1 h_{n-1}\left(1, X_2\right) + \ldots + X_1^n h_0$$

et

$$\tilde{\tilde{h}}\left(X_1, X_2\right) = h^+\left(X_2, 1\right) + X_1 h_{n-1}\left(X_2, 1\right) + \ldots + X_1^n h_0$$

où n = deg h.

Observation. *Soit* $l = \left(l_1, l_2\right)$ *un changement linnéaire des variables dans* $\boldsymbol{C}^2$. *Alors*

$$\widetilde{h \circ l}\left(X_1, X_2\right) = \left(l_1\left(1, X_2\right)\right)^n h^+\Bigg(\left(1, \frac{l_2\left(1, X_2\right)}{l_1\left(1, X_2\right)}\right) + \frac{X_1}{l_1\left(1, X_2\right)} h_{n-1}\left(1, \frac{l_2\left(1, X_2\right)}{l_1\left(1, X_2\right)}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{X_1}{l_1\left(1, X_2\right)}\right)^n h_0\Bigg)$$

où n = def h.

Proposition 1. *Soit* $l=(l_1,l_2)$ *un changement linnéaire des variables dans* $\boldsymbol{C}^2$ *du jacobien* $J_l=1$ *et tel que* $Y_1\not| \; f_1^+\circ l$ *et* $Y_1\not| \; f_2^+\circ l$. *Alors*

$$\operatorname{Res}_{\tilde a}\tilde g/\left(\tilde f_1, X_1^{-s}\tilde f_2\right)=\operatorname{Res}_{\tilde l^{-1}(a)} g\,\tilde\circ\, l/\left(f_1\,\tilde\circ\, l, X_1^{-s} f_2\,\tilde\circ\, l\right)$$

pour tout $a\in C_1\cap l_\infty\setminus\{(0:0:1)\}$. *De même*

$$\operatorname{Res}_{\tilde b}\tilde g/\left(X_1^{-s}\tilde f_1, \tilde f_2\right)=\operatorname{Res}_{\tilde l^{-1}(b)} g\,\tilde\circ\, l/\left(X_1^{-s}f_1\,\tilde\circ\, l, f_2\,\tilde\circ\, l\right)$$

pour tout $b\in C_2\cap l_\infty\setminus\{(0:0:1)\}$.

Preuve. On applique la régle de transformation des résidus [5] et l'observation cidessus. Avec $m=\deg g$, $n_1=\deg f_1$, $n_2=\deg f_2$ et $l_1=l_1(1,X_2)$, $l_2=l_2(1,X_2)$ il vient

$$\operatorname{Res}_{\tilde l^{-1}(a)} g\,\tilde\circ\, l/\left(f_1\,\tilde\circ\, l, X_1^{-s} f_2\,\tilde\circ\, l\right)=$$

$$\operatorname{Res}_{\tilde l^{-1}(a)} l_1^m\left[g^+\left(1,\frac{l_1}{l_1}\right)+\frac{X_1}{l_1}g_{m-1}\left(1,\frac{l_2}{l_1}\right)+\ldots+\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^m g_0\right]\Bigg/\left(\begin{array}{c} l_1^{n_1}\left[f_1^+\left(1,\dfrac{l_2}{l_1}\right)+\ldots\right], \\ X_1^{-s}l_1^{n_2}\left[f_2^+\left(1,\dfrac{l_2}{l_1}\right)+\ldots\right]\end{array}\right)=$$

$$\operatorname{Res}_{\tilde l^{-1}(a)} l_1^{m-(n_1+n_2-s)}\left[g^+\left(1,\frac{l_2}{l_1}\right)+\frac{X_1}{l_1}g_{m-1}\left(1,\frac{l_2}{l_1}\right)+\ldots+\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^m g_0\right]\Bigg/\left(\begin{array}{c} \left[f_1^+\left(1,\dfrac{l_2}{l_1}\right)+\ldots\right], \\ \left(\dfrac{X_1}{l_1}\right)^{-s}\left[f_2^+\left(1,\dfrac{l_2}{l_1}\right)+\ldots\right]\end{array}\right)$$

où $m-(n_1+n_2-s)=3$. En passant par le changement biholomorphe local des variables $\varphi(X_1,X_2)=\left(\dfrac{X_1}{l_1(1,X_2)},\dfrac{l_2(1,X_2)}{l_1(1,X_2)}\right)$ du jacobien $J_\varphi=\dfrac{J_l}{l_1^3}$ on retrouve le résidu démandé. Cela finit la démonstration de la proposition.

Proposition 2. *Soit* $a\in C_1\cap l_\infty$. *Si* $a\neq(0:0:1)$ *et* $a\neq(0:1:0)$, *on a l'égalité*

$$\operatorname{Res}_{\tilde a}\tilde g/\left(\tilde f_1, X_1^{-s}\tilde f_2\right)=-\operatorname{Res}_{\tilde{\tilde a}}\tilde{\tilde g}\Big/\left(\tilde{\tilde f}_1, X_1^{-s}\tilde f_2\right)$$

Preuve. On passe par le changement biholomorphe local des variables $\varphi(X_1,X_2)=\left(\dfrac{X_1}{X_2},\dfrac{1}{X_2}\right)$.

Corollaire. *Il existe un nombre* R *tel que pour tout changement linnéaire* l *des variables dans* $\boldsymbol{C}^2$ *du jacobien* $J_l = 1$ *et tel que* $Y_1 \nmid f_1^+ \circ l$, $Y_1 \nmid f_2^+ \circ l$ *et* $Y_2 \nmid f_1^+ \circ l$, $Y_2 \nmid f_2^+ \circ l$ *on ait*

$$R = -\sum_{a \in C_1 \cap l_\infty} \mathrm{Res}_{\tilde{l}^{-1}(a)}\, g \,\tilde{\circ}\, l \big/ \left(f_1 \,\tilde{\circ}\, l, X_1^{-s} f_2 \,\tilde{\circ}\, l\right) =$$

$$-\sum_{b \in C_2 \cap l_\infty} \mathrm{Res}_{\tilde{l}^{-1}(b)}\, g \,\tilde{\circ}\, l \big/ \left(X_1^{-s} f_1 \,\tilde{\circ}\, l, f_2 \,\tilde{\circ}\, l\right)$$

ou bien

$$R = \sum_{a \in C_1 \cap l_\infty} \mathrm{Res}_{\tilde{\tilde{l}}^{-1}(a)}\, g \,\overset{\approx}{\circ}\, l \big/ \left(f_1 \,\overset{\approx}{\circ}\, l, X_1^{-s} f_2 \,\overset{\approx}{\circ}\, l\right) =$$

$$\sum_{b \in C_2 \cap l_\infty} \mathrm{Res}_{\tilde{\tilde{l}}^{-1}(b)}\, g \,\overset{\approx}{\circ}\, l \big/ \left(X_1^{-s} f_1 \,\overset{\approx}{\circ}\, l, f_2 \,\overset{\approx}{\circ}\, l\right)$$

Preuve. On applique le lemme et les propositions 1 et 2.
Définition. Un nombre R étant donné ci-dessus on appellera *résidu à l'infini de g et* $f = (f_1, f_2)$ et on le notera par $Res_\infty\, g/f$.

Le théorème des résidus

Proposition 3. *Soit* $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \neq 0$, *un zéro isolé de l'application* $f = (f_1, f_2)$. *Alors*

$$\mathrm{Res}_x\, g/(f_1, f_2) = -\mathrm{Res}_{\tilde{x}}\, \tilde{g}\big/\left(\tilde{f}_1, X_1^{-s}\tilde{f}_2\right) = -\mathrm{Res}_{\tilde{x}}\, \tilde{g}\big/\left(X_1^{-s}\tilde{f}_1, \tilde{f}_2\right)$$

ou bien

$$\mathrm{Res}_x\, g/(f_1, f_2) = \mathrm{Res}_{\tilde{\tilde{x}}}\, \tilde{\tilde{g}}\Big/\left(\tilde{\tilde{f}}_1, X_1^{-s}\tilde{\tilde{f}}_2\right) = \mathrm{Res}_{\tilde{\tilde{x}}}\, \tilde{\tilde{g}}\Big/\left(X_1^{-s}\tilde{\tilde{f}}_1, \tilde{\tilde{f}}_2\right)$$

Théorème des résidus. *Soit* $f = (f_1, f_2) : \boldsymbol{C}^2 \to \boldsymbol{C}^2$ *une application polynomiale de zéros isolés. Pour tout polynôme* $g : \boldsymbol{C}^2 \to \boldsymbol{C}$ *on ait*

$$\sum_{x \in f^{-1}(0)} \mathrm{Res}_x\, g/f + \mathrm{Res}_\infty\, g/f = 0$$

Preuve. Le cas de $s = \deg f_1 + \deg f_2 - \deg g - 3 \geq 0$ étant prouvé dans [3]. Soit $s < 0$. Prenons un changement linnéaire l des variables dans $\boldsymbol{C}^2$du jacobien $J_l = 1$ et tel que $Y_1 \nmid f_1^+ \circ l$, $Y_1 \nmid f_2^+ \circ l$ *et* $Y_2 \nmid f_1^+ \circ l$, $Y_2 \nmid f_2^+ \circ l$ et $l^{-1}(x) \notin V(Y_1)$ pour tout $x \in f^{-1}(0)$. D'après la proposition ci-dessus et de la définition d'un résidu à l'infini on a

$$\sum_{x \in f^{-1}(0)} \operatorname{Res}_x g/f + \operatorname{Res}_\infty g/f = \sum_{x \in f^{-1}(0)} \operatorname{Res}_{l^{-1}(x)} g \circ l / (f_1 \circ l, f_2 \circ l) + \operatorname{Res}_\infty g/f =$$

$$- \sum_{x \in f^{-1}(0)} \operatorname{Res}_{\tilde{l}^{-1}(x)} g \,\tilde{\circ}\, l / \left(f_1 \,\tilde{\circ}\, l, X_1^{-s} f_2 \,\tilde{\circ}\, l\right)$$

$$- \sum_{a \in C_1 \cap l_\infty} \operatorname{Res}_{\tilde{l}^{-1}(a)} g \,\tilde{\circ}\, l / \left(f_1 \,\tilde{\circ}\, l, X_1^{-s} f_2 \,\tilde{\circ}\, l\right)$$

L'application $\left(f_1 \,\tilde{\circ}\, l, X_1^{-s} f_2 \,\tilde{\circ}\, l\right)$ n'a pas de zéros à l'infini et

$$\deg\left(g \,\tilde{\circ}\, l\right) \le \deg g = \deg f_1 - s + \deg f_2 - 3 = \deg\left(f_1 \,\tilde{\circ}\, l\right) + \deg\left(X_1^{-s} f_2 \,\tilde{\circ}\, l\right) - 3$$

D'après la formule d'Euler-Jacobi-Kronecker [1, 3, 5] la somme des résidus ci-dessus s'annule. Ceci conclut la preuve du théorème.

Bibliographie

[1] Arnold V.I., Singularities of Differentiable Maps, Vol. I, Boston 1985.

[2] Biernat G., Reduction of two-dimensional residues to the one-dimenional case, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 1989, Vol. XXXIX (15), No. 68.

[3] Biernat G., On the Jacobi-Kronecker formula for a polynomial mapping having zeros at infinity, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 1992, 42(29), Vol. XIV, 139.

[4] Biernat G., On the sum of residues for a polynomial mapping, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 1990, 40(18), No. 88.

[5] Griffiths P., Harris J., Principles of Algebraic Geometry, New York 1978.