O PEWNYCH DEFINICJACH STYCZNOŚCI ZBIORÓW

Tadeusz Konik

Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Częstochowska

Streszczenie. W niniejszej pracy omówiono pewne definicje styczności zbiorów w przestrzeniach metrycznych. W początkowej części pracy przedstawiono bardzo ogólną definicję styczności zbiorów W. Waliszewskiego, a następnie podano związki tej definicji ze znanymi wcześniej definicjami styczności łuków prostych w przestrzeniach metrycznych.

1. O styczności zbiorów w uogólnionej przestrzeni metrycznej

Niech E będzie dowolnym, niepustym zbiorem, natomiast l nieujemną funkcją rzeczywistą, określoną na iloczynie kartezjańskim $E_0 \times E_0$ rodziny E_0, wszystkich niepustych podzbiorów zbioru E. Przez l_0 oznaczmy funkcję określoną wzorem

$$l_0(x, y) = l(\{x\}, \{y\}) \quad \text{dla} \quad x, y \in E \tag{1}$$

Jeśli na funkcję l nałożymy pewne warunki, to funkcja l_0 określona wzorem (1) będzie metryką zbioru E. Z tych powodów parę (E, l) można traktować jako pewne uogólnienie przestrzeni metrycznej i nazywać będziemy uogólnioną przestrzenią metryczną.

Korzystając z warunku (1) można w przestrzeni (E, l), podobnie jak w przestrzeni metrycznej, zdefiniować kulę otwartą $K_{l_0}(p, r)$ o środku w punkcie $p \in E$ i promieniu $r \geq 0$

$$K_{l_0}(p, r) = \{x \in E : l_0(p, x) < r\} \tag{2}$$

Przyjmując rodzinę wszystkich kul otwartych o promieniach dodatnich za pełny układ otoczeń, nadajemy zbiorowi E charakter przestrzeni topologicznej. Zatem, każda uogólniona przestrzeń metryczna (E, l) wyznacza pewną przestrzeń topologiczną (E, τ_l). Zbiorami rodziny τ_l są sumy kul otwartych $K_{l_0}(p, r)$, a rodzina wszystkich kul otwartych stanowi bazę przestrzeni (E, τ_l). Rodzina wszystkich kul otwartych $K_{l_0}(p, r)$, o środku w punkcie p i promieniu wymiernym r, stanowi bazę przestrzeni topologicznej (E, τ_l) w punkcie p. Zbiór $A \subset E$ uważamy za otwarty w topologii τ_l wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $p \in A$ istnieje liczba $r > 0$ taka, że $K_{l_0}(p, r) \subset A$.

Niech zbiór $S_{l_0}(p,r)_u$ oznacza tu tzw. u-otoczenie sfery $S_{l_0}(p,r)$ o środku w punkcie p i promieniu $r \geq 0$ w przestrzeni (E,l), określone wzorem

$$S_{l_0}(p,r)_u = \begin{cases} \bigcup\limits_{q \in S_{l_0}(p,r)} K_{l_0}(q,u) & \text{dla} \quad u > 0 \\ S_{l_0}(p,r) & \text{dla} \quad u = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Niech a, b będą dowolnymi, nieujemnymi funkcjami rzeczywistymi określonymi w pewnym prawostronnym otoczeniu 0 takimi, że

$$a(r) \xrightarrow[r \to 0^+]{} 0 \quad \text{i} \quad b(r) \xrightarrow[r \to 0^+]{} 0 \tag{4}$$

Mówimy, że para (A,B) zbiorów $A, B \in E_0$ jest (a,b)-skupiona w punkcie p przestrzeni (E,l), jeśli 0 jest punktem skupienia zbioru wszystkich liczb rzeczywistych $r > 0$ takich, że zbiory $A \cap S_{l_0}(p,r)_{a(r)}$ i $B \cap S_{l_0}(p,r)_{b(r)}$ są niepuste.

Zgodnie z definicją podaną przez W. Waliszewskiego w pracy [12] mówimy, że zbiór $A \in E_0$ jest (a,b)-styczny rzędu k $(k > 0)$ do zbioru $B \in E_0$ w punkcie p przestrzeni (E,l), co zapisujemy $(A,B) \in T_l(a,b,k,p)$, jeśli para zbiorów (A,B) jest (a,b)-skupiona w punkcie p tej przestrzeni oraz

$$\frac{1}{r^k} l(A \cap S_{l_0}(p,r)_{a(r)}, B \cap S_{l_0}(p,r)_{b(r)}) \xrightarrow[r \to 0^+]{} 0 \tag{5}$$

Relację $T_l(a,b,k,p)$, określoną powyżej, nazywamy relacją (a,b)-styczności rzędu k w punkcie p (lub krótko: relacją styczności) zbiorów w uogólnionej przestrzeni metrycznej (E,l).

W tym miejscu powstaje pytanie: skąd taka definicja styczności zbiorów? Związek przedstawionej powyżej definicji styczności zbiorów ze znanymi wcześniej definicjami styczności zbiorów, w szczególności łuków prostych, zostanie omówiony poniżej.

2. O związkach między definicjami styczności zbiorów

Niech E, podobnie jak ustępie 1 pracy, będzie dowolnym niepustym zbiorem, natomiast ρ metryką tego zbioru. Niech I_p oznacza w przestrzeni metrycznej (E,ρ) klasę wszystkich łuków prostych o początku w punkcie $p \in E$. Przez łuk prosty rozumiemy tutaj homeomorficzny obraz przedziału $[0,1]$.

W pracy [3] S. Gołąb i Z. Moszner, uogólniając pojęcie kierunku oparte na definicji miary kąta, wprowadzone przez J. Haantjesa i R. Nottrota w [5] dla przestrzeni metrycznych, podali definicję styczności łuków prostych w dowolnej przestrzeni metrycznej (E, ρ). Zgodnie z tą definicją mówimy, że łuk $A \in I_p$ jest styczny do łuku $B \in I_p$ w punkcie $p \in E$, co zapisujemy AT_pB, jeśli

$$\frac{\rho(x, x')}{\rho(p, x)} \xrightarrow[A \ni x \to p]{} 0 \tag{6}$$

gdzie x' jest rzutem punktu $x \in A$ na łuk B.

Przez rzut punktu $x \in A$ na łuk $B = \{x(t) : \ 0 \le t \le 1\}$ rozumie się tutaj punkt $x' = x(t_0) \in B$, który odpowiada najmniejszej wartości t_0 parametru t i taki, że

$$\rho(x, x') = \rho(x, B) = \inf\{\rho(x, y) : \ y \in B\}$$

Z definicji (6) wynika natychmiast, że relacja styczności T_p jest relacją zwrotną w klasie I_p, czyli AT_pA dla $A \in I_p$. Relacja ta jest ponadto relacją przechodnią w tej klasie, to znaczy

$$(AT_pB \ \wedge \ BT_pC) \Rightarrow AT_pC \quad \text{dla} \quad A, B, C \in I_p$$

co pokazuje Twierdzenie 1 pracy [3].

Relacja T_p określona przez (6) nie jest jednak relacją symetryczną w klasie I_p łuków prostych. Jeśli jednak o łuku B założymy, że należy do klasy A_p, to T_p jest relacją symetryczną w tych klasach, tzn.

$$AT_pB \ \Rightarrow \ BT_pA \quad \text{dla} \quad A \in I_p \ \text{i} \ B \in A_p$$

co wynika z Twierdzenia 2 wyżej wymienionej pracy.

Przez A_p oznaczamy tutaj klasę łuków prostowalnych o początku w punkcie $p \in E$ i mających własność Archimedesa w tym punkcie, to znaczy klasę wszystkich łuków A spełniających warunek

$$\frac{\ell(\widetilde{px})}{\rho(p, x)} \xrightarrow[A \ni x \to p]{} 1$$

gdzie $\ell(\widetilde{px})$ oznacza długość łuku $\widetilde{px}$ o początku p i końcu x.

Oczywiście klasa A_p zawiera się w klasie łuków prostych I_p. Z powyższych rozważań wynika, że relacja styczności T_p jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, tzn. jest relacją równoważności w klasie A_p łuków prostowalnych o własności Archimedesa w punkcie $p \in E$.

Wykorzystując definicję kąta zawartego między łukami prostymi podaną w książce [1] przez A.D. Aleksandrova, w pracy [9] S. Midura wprowadza nową definicję styczności łuków prostych klasy I_p. Według tej definicji łuk $A \in I_p$ jest styczny do łuku $B \in I_p$ w punkcie $p \in E$, co zapisujemy AT_1B, jeśli

$$\frac{\rho^2(p,x)+\rho^2(p,y)-\rho^2(x,y)}{2\rho(p,x)\rho(p,y)} \xrightarrow[A\times B\ni(x,y)\to(p,p)]{} 1 \tag{7}$$

Z definicji (7) wynika natychmiast, że relacja styczności T_1 jest symetryczna w klasie łuków I_p. Relacja ta jest ponadto relacją przechodnią w klasie I_p, o czym świadczy Twierdzenie 4 pracy [9]. T_1 nie jest jednak relacją zwrotną w tej klasie. Jeśli jednak założymy, że AT_1B dla $A,B\in I_p$, to AT_1A i BT_1B, co wynika z symetryczności i przechodniości tej relacji w klasie I_p.

Z definicji styczności podanej przez S. Midurę wynika styczność łuków klasy I_p w sensie definicji styczności podanej przez S. Gołąba i Z. Mosznera. Implikacja odwrotna jest fałszywa. Jednak w Twierdzeniu 3 pracy [9] S. Midura udowodnił, że jeśli AT_pB i relacja styczności T_1 jest zwrotna dla tych łuków, to AT_1B.

W tej samej pracy S. Midura wykazał (zobacz Twierdzenie 6 pracy [9]), że w przestrzeni kartezjańskiej n-wymiarowej łuk $A\in I_p$ jest styczny do siebie w punkcie $p\in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy łuk ten ma styczną w tym punkcie. Stąd wynika, że w klasie łuków gładkich, w przestrzeni kartezjańskiej n-wymiarowej, definicje styczności S. Gołąba, Z. Mosznera oraz S. Midury są równoważne.

W pracy [11] W. Waliszewski podał definicję klasy zbiorów H_p:

$$H_p=\{A\subset E: p\in A' \text{ i } \frac{\rho^2(p,x)+\rho^2(p,y)-\rho^2(x,y)}{2\rho(p,x)\rho(p,y)} \xrightarrow[A\times A\ni(x,y)\to(p,p)]{} 1\} \tag{8}$$

gdzie A' oznacza zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru A.

Z definicji tej wynika, że Twierdzenie 3 pracy [9] można sformułować:

Jeśli AT_pB oraz $A,B\in H_p$, to łuk $A\in I_p$ jest styczny do łuku $B\in I_p$ w punkcie $p\in E$ w sensie definicji styczności podanej przez S. Midurę.

W pracy [9] S. Midura udowodnił także (zobacz Twierdzenie 2), że relacja styczności T_p jest symetryczna dla dowolnych łuków $A,B\in I_p$, pod warunkiem, że łuk $B\in H_p$.

Z powyższych rozważań wynika, że relacje styczności łuków T_p i T_1 są równoważne w klasie zbiorów $I_p\cap H_p$.

W pracach [10, 11] W. Waliszewski zastosował definicję styczności łuków podaną przez S. Gołąba i Z. Mosznera do klas zbiorów istotnie szerszych od klasy I_p łuków prostych, to jest do zbiorów niekoniecznie mających strukturę zadaną poprzez parametryzację, i uogólnił wyniki otrzymane przez S. Gołąba, Z. Mosznera i S. Midurę. W powyższych pracach mówi się, że zbiór $A\subset E$ jest styczny do zbioru $B\subset E$ w punkcie $p\in E$, co zapisujemy AT_pB, jeśli

$p \in A'$ oraz

$$\frac{\rho(x,B)}{\rho(p,x)} \xrightarrow[A \ni x \to p]{} 0 \tag{9}$$

gdzie $\rho(x,B)$ oznacza odległość punktu $x \in A$ od zbioru B w przestrzeni metrycznej (E,ρ).

W pracy [10] W. Waliszewski wykazał, że relacja styczności T_p jest przechodnia w klasie zbiorów $A'_p = \{A \subset E: \ p \in A'\}$. Relacja T_p jest oczywiście relacją zwrotną w tej klasie. W wyżej wymienionej pracy W. Waliszewski udowodnił także, że relacja ta jest symetryczna, tzn.

$$AT_pB \Rightarrow BT_pA \quad \text{dla} \quad A \in C_p \ \text{ i } \ B \in A^*_p \tag{10}$$

Klasy zbiorów C_p i A^*_p, które występują w warunku symetrii (10) są określone następująco:

$$C_p = \{A \subset E: \ p \in A' \ \text{ i składowa zbioru } \overline{A} \text{ zawierająca}$$
$$\text{punkt } p \text{ nie redukuje się do tego punktu}\} \tag{11}$$

natomiast

$$A^*_p = \{B \subset E: \ p \in B' \text{ i istnieje liczba } \lambda > 0 \text{ taka, że}$$
$$\limsup_{[B;p] \ni (x,y) \to (p,p)} \frac{\rho(x,y) - \lambda\rho(x,B)}{\rho(p,x)} \leq 0\} \tag{12}$$

gdzie

$$[B;p] = \{(x,y): \ x \in E, \ y \in B \ \text{ oraz } \ \rho(x,B) < \rho(p,x) = \rho(p,y)\}$$

Zbiór $\overline{A}$, o którym mowa w definicji (11) klasy C_p, oznacza domknięcie zbioru A w przestrzeni metrycznej (E,ρ).

W pracy [11] W. Waliszewski uogólnia uzyskane wcześniej wyniki pracy [10] dotyczące symetrii relacji T_p. Mianowicie, Twierdzenie 1 tej pracy mówi, że relacja styczności T_p jest symetryczna dla dowolnych zbiorów $A \in C_p$ oraz $B \in \widetilde{M}_p$, gdzie

$$\widetilde{M}_p = \{B \subset E: \ p \in B' \text{ oraz istnieje liczba } \mu > 0 \text{ taka, że}$$
$$\text{dla dowolnego } \varepsilon > 0 \text{ istnieje } \delta > 0 \text{ taka, że}$$
$$\text{dla każdej pary punktów } (x,y) \in [B;p,\mu],$$
$$\text{jeśli } \ \rho(p,x) < \delta \ \text{ i } \ \frac{\rho(x,B)}{\rho(p,x)} < \delta, \ \text{ to } \ \frac{\rho(x,y)}{\rho(p,x)} < \varepsilon\} \tag{13}$$

oraz

$$[B;p,\mu]=\{(x,y):\ x\in E,\ y\in B\ \text{ i }\ \mu\rho(x,B)<\rho(p,x)=\rho(p,y)\}$$

Celowo zastąpiłem tutaj klasę zbiorów M_p, która występuje w oryginale tego twierdzenia, klasą $\widetilde{M}_p$, gdyż w pracy [2] A. Chądzyńska wykazała, że klasy te są równe, a ponadto w wielu swoich pracach dotyczących styczności zbiorów (zobacz prace: [6] - [8]) zajmuję się klasami zbiorów będacych uogólnieniami klasy $\widetilde{M}_p$.

Ponieważ $I_p\subset C_p$, $A_p\subset A_p^*$ oraz $H_p\subset A_p^*\subset\widetilde{M}_p$, co wynika z badań przeprowadzonych w pracach [2], [10] oraz [11], więc twierdzenia S. Gołąba, Z. Mosznera i S. Midury dotyczące symetrii relacji styczności T_p wynikają bezpośrednio z Twierdzenia 1 pracy [11].

Przyjmijmy z definicji

$$\rho_0(A,B)=\sup\{\rho(x,B):\ x\in A\}\quad\text{dla}\ \ A\subset E\ \ \text{i}\ \ B\subset E$$

Warunek (9) z definicji S. Gołąba i Z. Mosznera styczności zbiorów można przedstawić w postaci równoważnej

$$\frac{1}{r}\sup\{\rho(x,B):\ x\in A\ \ \text{i}\ \ \rho(p,x)=r\}\xrightarrow[r\to 0^+]{}0$$

czyli

$$\frac{1}{r}\rho_0(A\cap S_\rho(p,r),B)\xrightarrow[r\to 0^+]{}0 \tag{14}$$

gdzie $S_\rho(p,r)$ przedstawia sferę o środku w punkcie p i promieniu r w przestrzeni metrycznej (E,ρ).
Przyjmując $a(r)=0$ oraz $b(r)=r$ dla $r\geq 0$, warunek (14) można zapisać w postaci

$$\frac{1}{r}\rho_0(A\cap S_\rho(p,r)_{a(r)},B\cap S_\rho(p,r)_{b(r)})\xrightarrow[r\to 0^+]{}0 \tag{15}$$

Oznacza to, że zbiór A jest (a,b)-styczny rzędu 1 do zbioru B w punkcie $p\in E$ w sensie definicji podanej przez W. Waliszewskiego w pracy [12], co zapisujemy $(A,B)\in T_{\rho_0}(a,b,1,p)$. Zbiory $S_\rho(p,r)_{a(r)}$, $S_\rho(p,r)_{b(r)}$ przedstawiają tutaj odpowiednio $a(r)$, $b(r)$-otoczenia sfery $S_\rho(p,r)$ w przestrzeni metrycznej (E,ρ) (zobacz definicję (3)).

Funkcja ρ_0 występująca w warunku (15) styczności zbiorów jest szczególnym przypadkiem nieujemnej funkcji rzeczywistej l, o której mowa w definicji styczności, sformułowanej w pracy [12]. Funkcje $a(r)=0$ i $b(r)=r$ dla $r\geq 0$

w warunku (15) są szczególnymi przypadkami funkcji a, b, które występują w podanej wyżej definicji. Ponadto w definicji tej mówi się o styczności zbiorów rzędu k, gdzie k jest dowolną, dodatnią liczbą rzeczywistą.

Definicja ta, jak widać z przytoczonych powyżej powodów, w istotny sposób uogólnia omówione wcześniej definicje styczności zbiorów w przestrzeniach metrycznych.

Niech f będzie dowolną, rosnącą i subaddytywną funkcją ciągłą, określoną w prawostronnym otoczeniu 0 taką, że $f(0) = 0$. Niech $\mathfrak{F}_{f,\rho}$ oznacza klasę wszystkich funkcji l spełniających warunki:

1^0 $\quad l : E_0 \times E_0 \longrightarrow [0, \infty)$,

2^0 $\quad f(\rho(A,B)) \leq l(A,B) \leq f(d_\rho(A \cup B)) \quad \text{dla} \quad A, B \in E_0$.

Opierając się na definicji styczności zbiorów podanej przez W. Waliszewskiego, rozważam w wielu swoich pracach (zobacz między innymi prace: [6] - [8]) różne zagadnienia dotyczące styczności zbiorów, w uogólnionych przestrzeniach metrycznych generowanych przez funkcje należące do klasy $\mathfrak{F}_{f,\rho}$.

Literatura

[1] Aleksandrov A.D., Vnutrennaja geometrija vypuklych poverchnostej, Moskva-Leningrad 1948.

[2] Chądzyńska A., On some classes of sets related to the symmetry of the tangency relation in a metric space, Ann. Soc. Math. Polon., Comm. Math. 1972, 16, 219-228.

[3] Gołąb S., Moszner Z., Sur le contact des courbes dans les espaces metriques généraux, Colloq. Math. 1963, 10, 105-311.

[4] Grochulski J., Konik T., Tkacz M., On the tangency of sets in metric spaces, Ann. Polon. Math. 1980, 38, 121-131.

[5] Haantjes J., Nottrot R., Distance geometry. Directions in metric spaces. Torsion, Indag. Math. 1955, 17, 405-410.

[6] Konik T., On the reflexivity symmetry and transitivity of the tangency relations of sets of the class $\widetilde{M}_{p,k}$, J. Geom. 1995, 52, 142-151.

[7] Konik T., The compatibility of the tangency relations of sets in generalized metric spaces, Mat. Vesnik 1998, 50, 17-22.

[8] Konik T., On some tangency relation of sets, Publ. Math. Debrecen 1999, 55/3-4, 411-419.

[9] Midura S., O porównaniu definicji styczności łuków prostych w ogólnych przestrzeniach metrycznych, Rocznik Nauk. Dydakt., WSP, Kraków 1966, 25, 91-122.
[10] Waliszewski W., On the tangency of sets in a metric space, Colloq. Math. 1966, 15, 127-131.
[11] Waliszewski W., O symetrii relacji styczności zbiorów w przestrzeni metrycznej, Zeszyty Nauk. Uniw. Łódz., Nauki Mat.-Przyr., seria II 1966, 185-190.
[12] Waliszewski W., On the tangency of sets in generalized metric spaces, Ann. Polon. Math. 1973, 28, 275-284.