

## MODELOWANIE PRZEPIYWÓW CIECZY Z WYKORZYSTANIEM METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Ewa Węgrzyn-Skrzypczak<sup>1</sup>, Tomasz Skrzypczak<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Częstochowska

<sup>2</sup>Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, Politechnika Częstochowska

**Streszczenie.** W pracy zajęto się jednym z aspektów rozwiązania równań Naviera-Stokesa. Jak wiadomo, rozwiązanie numeryczne tych równań stwarza wiele problemów związanych ze stabilnością procesu obliczeniowego. W celu pokonania tych trudności zastosowano metodę elementów skończonych z wykorzystaniem elementów Taylora-Hooda, które dzięki mieszanym funkcjom aproksymacyjnym, innym dla prędkości i ciśnienia, pozwalają na osiągnięcie zbieżności rozwiązania. Zaprezentowano przykład obliczeniowy potwierdzający skuteczność analizowanej metody.

### 1. Matematyczne podstawy zagadnienia

Przepływ dowolnej cieczy można zamodelować, opierając się na równaniach Naviera-Stokesa (1) i równaniu ciągłości (2) [1, 2]. Rozpatrywany będzie przepływ lepkiej cieczy nieściśliwej w obszarze dwuwymiarowym

$$\nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + X = 0 \quad (1)$$

$$\nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + Y = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Powyższe równania uzupełniają warunki brzegowe (3):

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma} &= g_1 \\ v|_{\Gamma} &= g_2 \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie  $u$ ,  $v$  oznaczają składowe prędkości w kierunkach  $x$ ,  $y$ ,  $P$  jest ciśnieniem,  $\rho$  gęstością cieczy,  $\nu$  współczynnikiem lepkości kinematycznej,  $X$ ,  $Y$  siłami masowymi, a  $g_1$ ,  $g_2$  danymi funkcjami opisującymi prędkość na brzegu.

Algorytm metody elementów skończonych wyprowadzono z tzw. kryterium metody odchyłek ważonych, które dla równań (1) i (2) ma następującą postać:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} w \left[ v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + X \right] d\Omega &= 0 \\ \iint_{\Omega} w \left[ v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + Y \right] d\Omega &= 0 \\ \iint_{\Omega} w \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie  $w$  jest pewną funkcją wagi.

W celu obniżenia rzędu pochodnej w równaniach (4) można skorzystać z twierdzenia Greena

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} A \frac{\partial B}{\partial x} d\Omega &= - \iint_{\Omega} \frac{\partial A}{\partial x} B d\Omega + \oint_{\Gamma} A B n_x d\Gamma \\ \iint_{\Omega} A \frac{\partial B}{\partial y} d\Omega &= - \iint_{\Omega} \frac{\partial A}{\partial y} B d\Omega + \oint_{\Gamma} A B n_y d\Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

Prowadzi to do następującej postaci równań

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left[ v \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial x} P + w \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] d\Omega &= \\ = \iint_{\Omega} w X d\Omega + \oint_{\Gamma} w \left[ \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - P \right) n_x + \left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_y \right] d\Gamma \\ \iint_{\Omega} \left[ v \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial y} P + w \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] d\Omega &= \\ = \iint_{\Omega} w Y d\Omega + \oint_{\Gamma} w \left[ \left( v \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + \left( v \frac{\partial v}{\partial y} - P \right) n_y \right] d\Gamma \\ \iint_{\Omega} w \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Przyjmując, że:

$$t_1 = \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - P \right) n_x + \left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_y$$

$$t_2 = \left( v \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + \left( v \frac{\partial v}{\partial y} - P \right) n_y$$

równania (6) można zapisać w krótszej postaci:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left[ v \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial x} P + w \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \\ = \iint_{\Omega} w X d\Omega + \oint_{\Gamma} w t_1 d\Gamma \\ \iint_{\Omega} \left[ v \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial y} P + w \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \\ = \iint_{\Omega} w Y d\Omega + \oint_{\Gamma} w t_2 d\Gamma \end{aligned} \quad (7)$$

$$\iint_{\Omega} w \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] d\Omega = 0$$

## 2. Algorytm MES

W celu rozwiązania równań (7) należy dokonać dyskretyzacji wnętrza  $\Omega$  i brzegu obszaru  $\Gamma$  rozważanego obszaru płaskiego. Proces dyskretyzacji polega na zastąpieniu całej przestrzeni obszaru zbiorem prostych figur geometrycznych, najczęściej trójkątów lub czworokątów [3]. W przypadku równania przewodnictwa ciepła wystarczy zastosować tzw. elementy skończone I rzędu, czyli posiadające węzły tylko w wierzchołkach. Rozkład dowolnej wielkości wewnątrz takiego elementu określa się za pomocą liniowych funkcji aproksymacyjnych. Równanie Naviera-Stokesa wymaga zastosowania elementów skończonych II rzędu, tzn. posiadających dodatkowe węzły w środku każdego boku. Dodatkowym wymogiem jest zastosowanie mieszanych funkcji aproksymacyjnych. Podejście takie zapewnia stabilność rozwiązania końcowego układu równań. Dla ułatwienia dalszych rozważań zastosowano trójkątne elementy skończone II rzędu z mieszanymi funkcjami aproksymującymi, liniowymi i kwadratowymi. Tego typu elementy określa się mianem elementów Taylora-Hooda.

Poniżej zaprezentowano postać równań (7) rozpisanych jako suma po wszystkich elementach skończonych

$$\begin{aligned}
& \sum_{(e)} \iint_{\Omega_e} \left[ v \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial x} P + w \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \\
& \quad = \sum_{(e)} \iint_{\Omega_e} w X d\Omega + \sum_{(e)} \oint_{\Gamma_e} w t_1 d\Gamma \\
& \sum_{(e)} \iint_{\Omega_e} \left[ v \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial y} P + w \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \\
& \quad = \sum_{(e)} \iint_{\Omega_e} w Y d\Omega + \sum_{(e)} \oint_{\Gamma_e} w t_2 d\Gamma \\
& \quad \quad \quad \sum_{(e)} \iint_{\Omega_e} w \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

Do dalszych rozważań wprowadzono dwa rodzaje funkcji aproksymacyjnych (funkcji kształtu elementów):

-  $w = L$  - liniowe funkcje kształtu;

-  $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y}$  - pochodne kwadratowych funkcji kształtu.

Dodatkowo zastosowano tzw. wielkości węzłowe:

$$u = N_I u_I, \quad v = N_I v_I, \quad u = N_I u_I \tag{9}$$

gdzie:  $i = 1, \dots, 3$ ,  $I = 1, \dots, 6$ .

Stosując powyższe podstawienia, można zapisać dla pojedynczego elementu skończonego:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega_e} \left[ v \left( \frac{\partial N_I}{\partial x} \frac{\partial N_J}{\partial x} + \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial N_J}{\partial y} \right) \{u\} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial N_I}{\partial x} L_J \{P\} + L_I \left( u_I \frac{\partial N_I}{\partial x} + v_I \frac{\partial N_J}{\partial y} \right) \{u\} \right] d\Omega = \\
& \quad = \iint_{\Omega_e} N_I X_I d\Omega + \oint_{\Gamma_e} N_I t_1 d\Gamma \\
& \iint_{\Omega_e} \left[ v \left( \frac{\partial N_I}{\partial x} \frac{\partial N_J}{\partial x} + \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial N_J}{\partial y} \right) \{v\} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial N_I}{\partial y} L_J \{P\} + L_I \left( u_I \frac{\partial N_I}{\partial x} + v_I \frac{\partial N_J}{\partial y} \right) \{v\} \right] d\Omega = \\
& \quad = \iint_{\Omega_e} N_I Y_I d\Omega + \oint_{\Gamma_e} N_I t_2 d\Gamma \\
& \quad \quad \quad \iint_{\Omega_e} L_I \left[ \frac{\partial N_J}{\partial x} \{u\} + \frac{\partial N_J}{\partial y} \{v\} \right] d\Omega = 0
\end{aligned}$$

gdzie:  $i, j = 1, \dots, 3$ ,  $I, J = 1, \dots, 6$ .

Wyprowadzając podstawienia:

$$\begin{aligned}
 K_{11} = K_{22} &= \nu \left( \frac{\partial N_I}{\partial x} \frac{\partial N_J}{\partial x} + \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial N_J}{\partial y} \right) + L_i \left( u_I \frac{\partial N_I}{\partial x} + v_I \frac{\partial N_J}{\partial y} \right) \\
 K_{12} = K_{21} = K_{33} &= 0 \\
 K_{13} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial N_I}{\partial x} L_j \\
 K_{23} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial N_I}{\partial y} L_j \\
 K_{31} &= L_i \frac{\partial N_J}{\partial x} \\
 K_{32} &= L_i \frac{\partial N_J}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{10}$$

oraz:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= N_I X_I \\
 B_2 &= N_I Y_I \\
 B_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

można zapisać dla pojedynczego elementu skończonego

$$\iint_{\Omega_e} \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & 0 \end{bmatrix} d\Omega \begin{bmatrix} u_I \\ v_I \\ P_I \end{bmatrix} = \iint_{\Omega_e} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \end{bmatrix} d\Omega \tag{12}$$

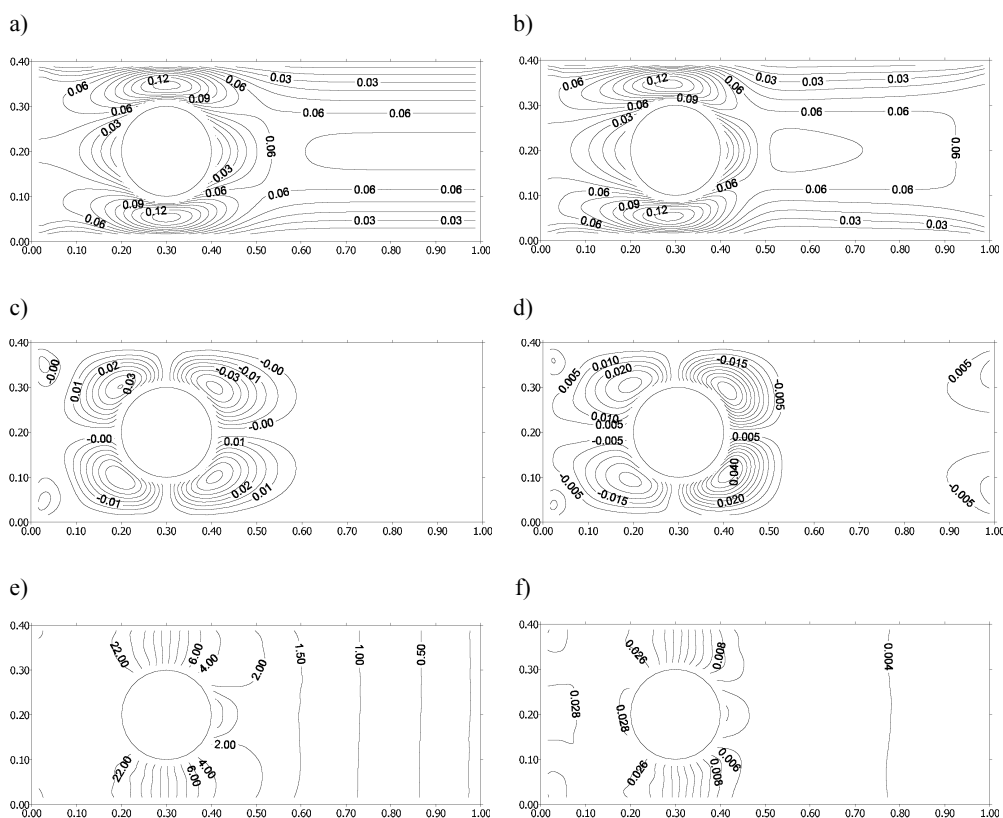
Dokonując agregacji modelu dyskretnego, otrzymuje się standardową postać układu równań

$$Kx = B \tag{13}$$

### 3. Przykład symulacji numerycznej

Na rysunku 1 przedstawiono symulację przepływu pomiędzy dwoma nieruchomymi równoległymi ścianami. Na lewej krawędzi zadano stałą prędkość  $u = 0.05$ . Gęstość  $\rho = 1$ . Lepkość kinematyczna dla rysunków a, c, e wynosi  $\nu = 1$ , dla b, d, f

lepkość  $\nu = 0.001$ . Obliczenia wykonano dla obszaru pokrytego siatką złożoną z 1214 6-węzłowych trójkątnych elementów skończonych.



Rys. 1. Prędkość  $u$  (a, b),  $v$  (c, d) i ciśnienie  $p$  (e, f) dla stanu ustalonego

## Wnioski

Rozwiązanie numeryczne równań N-S nastęrcza kilka problemów. Należy zaznaczyć, że macierz  $K$  jest źle uwarunkowana, co powoduje niedogodności w rozwiązaniu układu równań. Zastosowanie nieodpowiedniego preconditionera dla metod iteracyjnych może powodować wolne zbieganie się rozwiązania lub wręcz brak zbieżności. Stosunkowo szybko uzyskuje się rozwiązania, stosując metodę SuperLU. Kolejnym problemem są silnie nieliniowe człony bezwładnościowe występujące w równaniach N-S. Jeżeli są one niezerowe, należy do ostatecznego wyniku dochodzić poprzez ciąg rozwiązań iteracyjnych. Można tego dokonać, stosując metodę iteracji bezpośredniej lub też metodę Newtona-Raphsona. Poza tym, gdy w rozważanym ośrodku ciekłym konwekcja zaczyna dominować nad dyfuzją, może się okazać, że standardowe sformułowanie Galerkinia może nie wystarczyć

do osiągnięcia poprawnego rozwiązania. Należy wówczas uciec się do innego sformułowania MES, np. metody Petrova-Galerkina [4].

## **Literatura**

- [1] Bathe K.J., Finite Element Procedures, Prentice Hall, New Jersey 1996.
- [2] Gryboś R., Podstawy mechaniki płynów, PWN, Warszawa 1989.
- [3] Zienkiewicz O.C., Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa 1972.
- [4] Onate E., Manzan M., Stabilization Techniques for Finite Element Analysis of Convection-Diffusion Problems, Computational Analysis of Convection Heat Transfer, WitPress Southampton, Boston 2000.