PODSTAWY ARYTMETYKI INTERWAŁOWEJ

Maria Lupa

Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Częstochowska

Streszczenie. Przedstawiono podstawy klasycznej arytmetyki interwałowej - omówiono działania na interwałach oraz własności tych działań, funkcje i macierze na interwałach oraz interwałowe układy równań.

Wstęp

Każda operacja arytmetyczna na wynikach pomiaru powoduje wykonanie określonego działania na błędach obciążających ten wynik, a zatem wprowadza własne błędy. Efekty te kumulują się, co powoduje, że przy dużej liczbie operacji wynik może istotnie różnić się od wartości, która może być uznana za poprawną. W tej sytuacji należy żądać nie tylko określenia niedokładności wyniku, ale również wymagać sformalizowania tego procesu w takim stopniu, aby uproszczenia w jego realizacji dały się kontrolować.

Obserwuje się, że realizując wielokrotnie pomiar tej samej wielkości w tych samych warunkach uzyskuje się różne liczby. Jest to wynik występowania czynników losowych w procesie pomiaru. Czynniki te powodują, że wynik pomiaru musi być traktowany jako reprezentant pewnej grupy liczb, które mogą stać się wynikami pomiaru. Miarę rozrzutu liczb w rozważanym zbiorze pomiarów określa się jako niepewność. Rozrzut charakteryzowany jest przez przedział, w którym mieszczą się „prawie wszystkie" wyniki pomiaru, możliwe do uzyskania w danych warunkach (tzn. z odpowiednio dużym prawdopodobieństwem). Jest to sposób standardowy wyznaczania niepewności w oparciu o zasady rachunku prawdopodobieństwa. Jednakże sposób ten zawodzi w przypadku, gdy zachodzi potrzeba wyznaczenia niepewności wyniku uzyskiwanego na wyjściu algorytmu w efekcie przetwarzania ciągu danych pomiarowych wielkości zmieniającej się w czasie.

Innym sposobem podejścia do powyższego problemu jest wykorzystanie tzw. klasycznej arytmetyki interwałowej, w której wynik pomiaru jest reprezentowany przez ograniczony zbiór liczb rzeczywistych, czyli interwał (por. [1]).

1. Interwały

Niech R oznacza zbiór liczb rzeczywistych. Interwałem nazywany jest zbiór

$$x \equiv [\underline{x}, \overline{x}] := \{\tilde{x} \in R; \underline{x} \le \tilde{x} \le \overline{x}\}$$

gdzie $\underline{x}$ i $\overline{x}$ są odpowiednio dolną oraz górną granicę interwału i należą do zbioru R. Symbol $\tilde{x}$ oznacza każdy element należący do interwału x.

Granice interwału stanowią jego wielkości charakterystyczne, czyli mogą być traktowane jako parametry interwału. Zgodnie z definicją, granice są parametrami pierwotnymi interwału. Przy użyciu parametrów pierwotnych definiuje się parametry wtórne interwału. Parametry wtórne to średnia granic interwału

$$\tilde{x} \equiv mid(x) := \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2}$$

zwana środkiem interwału, oraz promień interwału

$$rad(x) := \frac{\overline{x} - \underline{x}}{2}$$

Wartość „największą” lub wartość bezwzględną interwału x określamy następująco:

$$|x| = mag(x) := max\{|\tilde{x}| : \tilde{x} \in x\}$$

Analogicznie określamy wartość „najmniejszą” interwału

$$< x >= mig(x) := min\{|\tilde{x}| : \tilde{x} \in x\}$$

Oba pojęcia $mag(x)$ i $mig(x)$ można wyrazić za pomocą punktów krańcowych:

$$|x| = max\{|\underline{x}|, |\overline{x}|\}$$

$$<x>= min\{|\underline{x}|, |\overline{x}|\}, \text{ jeśli } 0 \notin x$$

$$< x >= 0, \text{ jeśli } 0 \in x$$

Szczególnym przypadkiem interwału jest liczba rzeczywista. Jest to interwał o zerowym promieniu, nazywamy go interwałem smukłym. Dla smukłego interwału zachodzi warunek $rad(x) = 0$ (lub $\underline{x} = \overline{x}$).

Jeśli $S \subset R$ jest niepustym podzbiorem zbioru R, to powłokę zbioru S określamy jako

$$\square S := [inf(S), sup(S)]$$

Np. $\square\{(a,b) = [a,b]$, jeśli a < b; $\square\{(a,b)\} = [b,a]$, b < a.

Relację porządkującą w odniesieniu do interwałów określamy następująco:

Niech $\rho \in \{<, \leq, >, \geq\}$

$$\mathrm{x}\,\rho\,\mathrm{y} \Leftrightarrow \tilde{\mathrm{x}}\,\rho\,\tilde{\mathrm{y}} \text{ dla wszystkich } \tilde{x} \in x, \tilde{\mathrm{y}} \in \mathrm{y}$$

Oczywiście zachodzą następujące własności:

1. $x < y \Leftrightarrow \overline{x} < \underline{y}$
2. $x > y \Leftrightarrow \underline{x} > \overline{y}$
3. $x \leq y \Leftrightarrow \overline{x} \leq \underline{y}$
4. $x \geq y \Leftrightarrow \underline{x} \geq \overline{y}$

Relacja porządkująca jest antysymetryczna i przechodnia. Dodatkowo relacje $\geq, \leq$ są zwrotne. Dwa dowolne interwały nie muszą być jednak porównywalne, np. [1,3] i [2,4] nie są.

2. Działania na interwałach

Podstawowe działania dla interwałów (*o* - dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i potęgowanie interwałów) określamy następująco:

$$x\, o\, y = \{\tilde{x}\, o\, \tilde{y} : \tilde{x} \in x, \tilde{y} \in y\}$$

dla dowolnych interwałów $x, y \in \Re$, dla których jest określone działanie o (oczywiście niektóre z działań wymagają dodatkowych założeń):

a) dodawanie

$$x + y = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}]$$

np. [1,3] + [4,5] = [5,8], 1 + [–3,2] = [–2,3]

b) odejmowanie

$$x - y = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}]$$

np. [2,5] – [0,2] = [0,5], [–2,–1] – [3,4] = [–6,–4]

c) mnożenie $x \cdot y$

	$y \geq 0$	$0 \in y$	$y \leq 0$
$x \geq 0$	$[\underline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}]$	$[\overline{x}\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}]$	$[\overline{x}\underline{y}, \underline{x}\,\overline{y}]$
$0 \in x$	$[\underline{x}\,, \overline{yx}\;\overline{y}]$	$[\min(\underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}),$ $\max(\underline{x}\;\;\underline{y}, \overline{x}\,\underline{y})]$	$[\overline{x}\;\underline{y}, \underline{x}\,\underline{y}]$
$x \leq 0$	$[\underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}]$	$[\underline{x}\,\overline{y}, \underline{\mathrm{x}}\,\underline{\mathrm{y}}]$	$[\overline{x}\;\overline{y}, \underline{x}\,\underline{y}]$

np. [1,2] · [3,4] = [3,8], [–2,–1] · [0,2] = [–4,0], [–1,2] · [–1,2] = [–2,4]

Jeśli $rad(\mathrm{x}) = 0 \Rightarrow \mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = \begin{cases} [x\underline{y}, x\overline{y}], \text{ jeśli } x \geq 0 \\ [x\overline{y}, x\underline{y}], \text{ jeśli } x \leq 0 \end{cases}$

Stąd mamy: –3 · [1,2] = [–6,–3]

d) dzielenie *x/y* jest możliwe w przypadkach, gdy $0 \notin y$

	$y > 0$	$y < 0$
$x \geq 0$	$[\underline{x}/\overline{y}, \overline{x}/\underline{y}]$	$[\overline{x}/\overline{y}, \underline{x}/\underline{y}]$
$0 \in x$	$[\underline{x}/\underline{y}, \overline{x}/\underline{y}]$	$[\overline{x}/\overline{y}, \underline{x}/\overline{y}]$
$x \leq 0$	$[\underline{x}/\underline{y}, \overline{x}/\overline{y}]$	$[\overline{x}/\underline{y}, \underline{x}/\overline{y}]$

Jeśli $0 \notin x \Rightarrow x^{-1} = [\overline{x}^{-1}, \underline{x}^{-1}]$

np. : [1,3]/[–1/1] nie jest zdefiniowane; 2/[1,2] = [1,2]; [–2,4]/[1,2] = [–2,4]; [2,4]/[–2,–1] = [–4,–1].

e) potęgowanie x^y jest możliwe w jednym z przypadków:

1^0 $\underline{x} > 0$

2^0 $\underline{x} \geq 0 \wedge \underline{y} > 0$

3^0 $0 \notin x, y \leq 0$ - całkowite

4^0 $y > 0$ - całkowite

np. $[2,3]^2 = [4,9]$; $[-1,2]^2 = [2,4]$

3. Własności działań na interwałach

Następujące własności działań na interwałach mają swoje odpowiedniki dla działań na liczbach rzeczywistych:

1. $x + y = y + x$; $x \cdot y = y \cdot x$ (przemienność)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$; $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (łączność)
3. $x + 0 = 0 + x = x$; $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ (el. neutralny)
4. $x - y = x + (-y) = -y + x$
5. $x / y = x \cdot y^{-1} = y^{-1} \cdot x$
6. $-(x - y) = y - x$
7. $x(-y) = (-x) \cdot y = -x \cdot y$
8. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$
9. $x - (y \pm z) = (x - y) \mp z$

Warto zauważyć, że w arytmetyce interwałowej zachodzą następujące inkluzje:

10. $x \cdot (y \pm z) \subseteq x \cdot y \pm x \cdot z$
11. $(x \pm y) \cdot z \subseteq x \cdot y \pm y \cdot z$

12. $x - y \subseteq (x + y) - (y + z)$
13. $x / y \subseteq (x \cdot z)/(y \cdot z)$
14. $0 \in x - x$
15. $1 \in x / x$

Na przykład:
a) $[-1,1] \cdot ([0,1] + [-1,0]) = [-1,1] \subseteq [-2,2] = [-1,1] \cdot [0,1] + [-1,1] \cdot [-1,1] \cdot [-1,0]$

b) $1 \in [\frac{1}{2}, 2] = [1,2]/[1,2]$

Własności 10-15 istotnie różnią się od analogicznych własności działań dla liczb rzeczywistych. Przy dodatkowych założeniach można, w niektórych z nich, uzyskać równość w arytmetyce interwałowej, np. jeśli *x*,*y*,*z* są interwałami, to zachodzi:

$x(y \pm z) = x \cdot y \pm x \cdot z$ przy założeniu, że *x* jest smukłym interwałem

$x \cdot (x + y) = x \cdot y + x \cdot z$ przy założeniu, że $y, z \geq 0$ lub $y, z \leq 0$

$x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$ jeśli $x \geq 0 \geq z$ lub $y \leq 0 \leq z$

W przypadku 14 $x - x = 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy *x* - smukły. Jeśli np. $x = [1,2]$, to $[1,2] - [1,2] = [-1,1]$, mamy więc $0 \in x - x$.

4. Funkcje i macierze na interwałach, liniowe układy interwałowe

Niech Φ oznacza zbiór elementarnych funkcji rzeczywistych ciągłych na każdym domkniętym interwale, na których są określone. Jeśli *x* jest interwałem, $\varphi \in \Phi$, to funkcję na interwale określamy następująco:

$$\varphi(x) := \square\{\varphi(\tilde{x}); \tilde{x} \in x)\}$$

dla wszystkich interwałów $x \in \Re$, dla których $\varphi(\tilde{x})$ jest określone, gdzie $\tilde{x} \in x$.

Na przykład:
a) funkcja wartość bezwzględna na interwale *x*: abs(x) = [mig(x), mag(x)]
b) funkcja wykładnicza na interwale *x*: $\exp(x) = [\exp \underline{x}, \exp \overline{x}]$
c) funkcja pierwiastek kwadratowy na interwale *x*: sqrt(x) = $[0,x^2]$

Macierzą interwałową o wymiarze *m* x *n* nazywamy tablicę

$$A = (A_{ik}) = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & \dots & A_{1n} \\ \dots & & & \dots \\ \dots & & & \dots \\ A_{m1} & \dots & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{gdzie } A_{jk} \in \Re \text{ są interwałami}$$

Zbiór macierzy interwałowych o wymiarach *m* x *n* oznaczamy $\Re^{mxn}$.

Macierz interwałowa $A = (A_{ik})$ jest interpretowana jako zbiór rzeczywistych *m* x *n* wymiarowych macierzy.

$$A = \{\widetilde{A} \in R^{mxn} : \widetilde{A}_{ik} \in A_{ik}, i = 1,\ldots,m, k = 1,\ldots,n\}$$

Macierz interwałowa o wymiarze n x 1 jest wektorem interwałowym, a macierz o wymiarze 1 x 1 jest interwałem.
Analogicznie jak dla interwału określamy:

$$\underline{A} = inf(A) := (\underline{A}_{ik})$$

$$\overline{A} = sup(A) := (\overline{A}_{ik})$$

$$\breve{A} = mid(A) := (\breve{A}_{ik})$$

$$rad(A) := (rad(A_{ik})$$

$$|A| := (|A_{ik}|)$$

Podstawowe działania na macierzach $A, B \in \Re^{mxn}$ definiujemy następująco:

a) dodawanie i odejmowanie

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} := \square \{\widetilde{A} + \widetilde{B} : \widetilde{A} \in A, \widetilde{B} \in B\}$$

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} := \square \{\widetilde{A} - \widetilde{B} : \widetilde{A} \in A, \widetilde{B} \in B\}$$

b) mnożenie, $A \in \Re^{mxn}$, $B \in \Re^{nxp}$ to $A \cdot B \in \Re^{nxp}$

$$A \cdot B := \square \{\widetilde{A} \in A, \widetilde{B} \in B\}$$

c) mnożenie przez skalar - interwał $a \in \Re$

$$a \cdot A := \square \{\widetilde{a} \cdot \widetilde{A} : \widetilde{a} \in a, \widetilde{A} \subset A\}$$

Mając definicje działań na macierzach, można rozważać liniowe równanie interwałowe. Jeśli $A \in \Re^{mxn}$ jest macierzą interwałową oraz $b \in \Re^{m}$ jest wektorem interwałowym, to liniowym układem równań interwałowych nazywany rodzinę równań liniowych

$$\widetilde{A} \cdot \widetilde{x} = \widetilde{b}, \text{ gdzie } \widetilde{A} \in A, \widetilde{b} \in b$$

x jest wektorem interwałowym niewiadomym.

Prosty aparat matematyczny opisany powyżej wykazuje szczególne zalety w zastosowaniach technicznych - do zagadnień przetwarzania danych pomiarowych [2] oraz do rozwiązywania wielu problemów ekonomicznych, jak np. prognozowanie kosztów i wielkości produkcji w modelu wejścia-wyjścia (por. [3]).

Literatura

[1] Neumaier A., Interval methods for system of equations, Cambridge University Press, 1990.

[2] Jakubiec J., Redukcyjna arytmetyka interwałowa w zastosowaniach do wyznaczania niepewności algorytmów przetwarzania danych pomiarowych, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2002.

[3] Gonera M., Jończyk M., Dolata M., Herka W., Zastosowania arytmetyki interwałowej i rozmytej w zagadnieniach gospodarczych, Informatyka Teoretyczna i Stosowania 2004, 6, 153-175.